29/5/2003 ΘΕΜΑ 2^o

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z=\alpha+\beta i$, όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

και $w=3z - i\bar{z}+4$, όπου $\bar{z}$ είναι ο συζυγής του z.

α. Να αποδείξετε ότι $Re(w)=3\alpha-\beta+4$

$Im(w)=3\beta-\alpha$.

Μονάδες 6

β. Να αποδείξετε ότι, αν οι εικόνες του w στο μιγαδικό επίπεδο κινούνται στην ευθεία με εξίσωση $y=x-12$, τότε οι εικόνες του z κινούνται στην ευθεία με εξίσωση $y=x-2$.

Μονάδες 9

γ. Να βρείτε ποιος από τους μιγαδικούς αριθμούς z, οι εικόνες των οποίων κινούνται στην ευθεία με εξίσωση $y=x-2$, έχει το ελάχιστο μέτρο.

Μονάδες 10

8/7/2003 ΘΕΜΑ 2^o (ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ)

α. Να περιγράψετε γεωμετρικά το σύνολο (Σ) των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z που ικανοποιούν τις σχέσεις:

$|z|=2$ και $Im(z)\geq 0$.

Μονάδες 12

β. Να αποδείξετε ότι, αν η εικόνα του μιγαδικού αριθμού z κινείται στο σύνολο (Σ), τότε η εικόνα του μιγαδικού αριθμού $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{4}{z}\right)$ κινείται σε ευθύγραμμο τμήμα το οποίο βρίσκεται στον άξονα $x'x$.

Μονάδες 13

19/9/2003 ΘΕΜΑ 3ο (ΟΜΟΓΕΝΩΝ)

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(z) = \frac{z+i}{z}$, όπου z μιγαδικός αριθμός με $z \neq 0$.

α) Αν $|f(z)| = |f(\overline{z})|$, να αποδείξετε ότι ο z είναι πραγματικός αριθμός.

Μονάδες 6

β) Αν $|f(z)| = 1$, να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z στο μιγαδικό επίπεδο.

Μονάδες 9

γ) Αν $\text{Re}\,(f(z)) = 2$, να αποδείξετε ότι οι εικόνες του μιγαδικού αριθμού z, βρίσκονται σε κύκλο του οποίου να προσδιορίσετε το κέντρο και την ακτίνα.

Μονάδες 10

27/5/2004 ΘΕΜΑ 4ο

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(1)=1$. Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει

$$g(x) = \int_1^{x^3} |z| f(t)dt - 3\left|z + \frac{1}{z}\right|(x-1) \geq 0,$$

όπου $z = \alpha + \beta i \in \mathbb{C}$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, τότε:

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και να βρείτε τη g'.

Μονάδες 5

β. Να αποδείξετε ότι $|z| = \left|z + \frac{1}{z}\right|$

Μονάδες 8

γ. Με δεδομένη τη σχέση του ερωτήματος β να αποδείξετε ότι $\text{Re}(z^2) = -\frac{1}{2}$

Μονάδες 6

δ. Αν επιπλέον $f(2)=\alpha>0$, $f(3)=\beta$ και $\alpha>\beta$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (2,3)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$.

Μονάδες 6

5/7/2004 ΘΕΜΑ 3ο (ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ)

Δίνεται μια συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και μιγαδικός αριθμός z με $Re(z) \neq 0$, $Im(z) \neq 0$ και $|Re(z)| > |Im(z)|$.

Αν $z+\frac{1}{z} = f(\alpha)$ και $z^2+\frac{1}{z^2} = f^2(\beta)$, να αποδείξετε ότι:

α. $|z| = 1$

Μονάδες 11

β. $f^2(\beta) < f^2(\alpha)$

Μονάδες 5

γ. η εξίσωση $x^3 f(\alpha) + f(\beta) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(-1, 1)$.

Μονάδες 9

16/9/2004 ΘΕΜΑ 3ο (ΟΜΟΓΕΝΩΝ)

Έστω z μιγαδικός αριθμός, με $z \neq \pm i$ και $w = \frac{z}{z^2+1}$.

α) Να αποδείξετε ότι αν ο w είναι πραγματικός, τότε ο z είναι πραγματικός ή $|z|=1$.

Μονάδες 10

β) Να λύσετε, στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών, την εξίσωση $\frac{z}{z^2+1} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Μονάδες 10

γ) Αν z_1, z_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος (β), να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$K=\frac{(z_1\cdot z_2)^3-i}{4+(z_1+z_2)^2}$$

Μονάδες 5

31/5/2005 ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2, z_3 με $|z_1|=|z_2|=|z_3|=3$.

α. Δείξτε ότι: $\overline{z_1}=\dfrac{9}{z_1}$.

Μονάδες 7

β. Δείξτε ότι ο αριθμός $\dfrac{z_1}{z_2}+\dfrac{z_2}{z_1}$ είναι πραγματικός .

Μονάδες 9

γ. Δείξτε ότι: $|z_1+z_2+z_3|=\dfrac{1}{3}|z_1\cdot z_2+z_2\cdot z_3+z_3\cdot z_1|$.

Μονάδες 9

6/7/2005 ΘΕΜΑ 2ο (ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ)

α. Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει

$z_1+z_2=4+4i$ και $2z_1-\overline{z}_2=5+5i$,

να βρείτε τους z_1, z_2.

Μονάδες 10

β. Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς z,w ισχύουν $|z-1-3i|\le\sqrt{2}$ και $|w-3-i|\le\sqrt{2}$:

i. να δείξετε ότι υπάρχουν μοναδικοί μιγαδικοί αριθμοί z, w έτσι, ώστε z=w και

Μονάδες 10

ii. να βρείτε τη μέγιστη τιμή του $|z-w|$.

Μονάδες 5

13/9/2005 ΘΕΜΑ 2ο (ΟΜΟΓΕΝΩΝ)

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί

$z_1 = 3+i$ και $z_2 = 1-3i$.

α) Να αποδείξετε ότι $\dfrac{z_1}{z_2} = i$ και $\left| iz_1 + z_2 \right|^2 = 0$.

Μονάδες 8

β) Να αποδείξετε ότι $z_1^{2006} + z_2^{2006} = 0$.

Μονάδες 8

γ) Θεωρούμε το μιγαδικό αριθμό

$$w = \frac{kz_1 - iz_2}{z_2 - kz_2} \quad , \quad k \in \mathbb{R} - \{1\} .$$

Να αποδείξετε ότι για κάθε $k \in \mathbb{R} - \{1\}$ ισχύει $\mathrm{Im}(w) = -1$.

Μονάδες 9

27/5/2006 ΘΕΜΑ 3ο

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2, z_3 με $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ και $z_1 + z_2 + z_3 = 0$.

α. Να αποδείξετε ότι:

i. $|z_1 - z_2| = |z_3 - z_1| = |z_2 - z_3|$.

Μονάδες 9

ii. $|z_1 - z_2|^2 \le 4$ και $\mathrm{Re}\,(z_1 \bar{z}_2) \ge -1$.

Μονάδες 8

β. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των z_1, z_2, z_3 στο μιγαδικό επίπεδο, καθώς και το είδος του τριγώνου που αυτές σχηματίζουν.

Μονάδες 8

5/7/2006 ΘΕΜΑ 3ο (ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ)

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z, που ικανοποιούν την ισότητα $(4-z)^{10} = z^{10}$ και η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^2+x+\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών z ανήκουν στην ευθεία $x=2$.

Μονάδες 7

β. Αν η εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο τομής της με την ευθεία $x=2$ τέμνει τον άξονα y΄y στο $y_o=-3$, τότε

i. να βρείτε το α και την εξίσωση της εφαπτομένης (ε).

Μονάδες 9

ii. να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, της εφαπτομένης (ε), του άξονα x΄x και της ευθείας $x=\frac{3}{5}$.

Μονάδες 9

12/9/2006 ΘΕΜΑ 2ο (ΟΜΟΓΕΝΩΝ)

Έστω ότι για τον μιγαδικό αριθμό z ισχύει:

$$(5z-1)^5 = (z-5)^5 \ .$$

α) Να δείξετε ότι $|5z-1| = |z-5|$.

Μονάδες 5

β) Να δείξετε ότι: $|z| = 1$.

Μονάδες 10

γ) Αν $w = 5z+1$, να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων M(w) στο μιγαδικό επίπεδο.

Μονάδες 10

24/5/2007 ΘΕΜΑ 2^{ο}

Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός

$$z=\frac{2+\alpha i}{\alpha+2i} \qquad \text{με } \alpha\in\mathbb{R}.$$

α. Να αποδειχθεί ότι η εικόνα του μιγαδικού z ανήκει στον κύκλο με κέντρο O(0,0) και ακτίνα ρ =1.

Μονάδες 9

β. Έστω z_1, z_2 οι μιγαδικοί που προκύπτουν από τον τύπο

$$z=\frac{2+\alpha i}{\alpha+2i}$$

για α = 0 και α = 2 αντίστοιχα.

i. Να βρεθεί η απόσταση των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z_1 και z_2.

Μονάδες 8

ii. Να αποδειχθεί ότι ισχύει:

$$(z_1)^{2\nu}=(-z_2)^{\nu}$$

για κάθε φυσικό αριθμό ν.

Μονάδες 8

3/7/2007 ΘΕΜΑ 4^{ο} (ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ)

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1=\alpha+\beta i$ και $z_2=\dfrac{2-\bar{z}_1}{2+\bar{z}_1}$, όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ με $\beta\neq 0$. Δίνεται επίσης ότι $z_2-z_1\in\mathbb{R}$.

α. Να αποδειχθεί ότι $z_2-z_1=1$.

Μονάδες 9

β. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z_1 στο μιγαδικό επίπεδο.

Μονάδες 6

γ. Αν ο αριθμός z_1^2 είναι φανταστικός και $\alpha\beta>0$, να υπολογισθεί ο z_1 και να δειχθεί ότι

$$(z_1+1+i)^{20}-(\bar{z}_1+1-i)^{20}=0.$$

Μονάδες 10

11/9/2007 ΘΕΜΑ 2ο (ΟΜΟΓΕΝΩΝ)

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1=i$, $z_2=1$ και $z_3=1+i$.

α. Να αποδείξετε ότι: $|z_1|^2+|z_2|^2=|z_3|^2$.

Μονάδες 5

β. Αν για το μιγαδικό z ισχύει $|z-z_1|=|z-z_2|$, τότε να αποδείξετε ότι:

i. Re (z) = Im (z).

Μονάδες 10

ii. για $z \neq 0$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A=\frac{z}{\bar{z}}+\frac{\bar{z}}{z}.$$

Μονάδες 10

24/5/2008 ΘΕΜΑ 2ο

Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς z και w ισχύουν

$$\left|(i+2\sqrt{2})z\right| = 6 \quad \text{και} \quad \left|w-(1-i)\right| = \left|w-(3-3i)\right|$$

τότε να βρείτε:

α. το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z .

Μονάδες 6

β. το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w .

Μονάδες 7

γ. την ελάχιστη τιμή του $|w|$

Μονάδες 6

δ. την ελάχιστη τιμή του $|z-w|$

Μονάδες 6

3/7/2008 ΘΕΜΑ 2ο (ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ)

Δίνεται ότι ο μιγαδικός αριθμός $z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ είναι ρίζα της εξίσωσης $z^2+\beta z+\gamma=0$, όπου β και γ πραγματικοί αριθμοί.

α. Να αποδείξετε ότι $\beta=-1$ και $\gamma=1$.

Μονάδες 9

β. Να αποδείξετε ότι $z_1^3=-1$.

Μονάδες 8

γ. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του μιγαδικού αριθμού w, για τον οποίο ισχύει:

$$|w| = |z_1 - \overline{z_1}|$$

Μονάδες 8

9/9/2008 ΘΕΜΑ 2ο (ΟΜΟΓΕΝΩΝ)

Α. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z = k + (k+1)i$, $k \in \mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z είναι η ευθεία $y = x + 1$.

Μονάδες 6

β. Ποιοι από αυτούς τους μιγαδικούς αριθμούς έχουν $|z|=1$;

Μονάδες 9

Β. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει $\alpha^2+\beta^2+8=(1-i)^4\beta-(1+i)^4\alpha$, να δείξετε ότι $\alpha=2$ και $\beta=-2$.

Μονάδες 10

20/5/2009 ΘΕΜΑ 2^{ο}

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς

$$z=(2\lambda+1)+(2\lambda-1)i\ , \qquad \lambda\in\mathbb{R}$$

Α.α. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας πάνω στην οποία βρίσκονται οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z, για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$

Μονάδες 9

β. Από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς να αποδείξετε ότι ο μιγαδικός αριθμός $z_0=1-i$ έχει το μικρότερο δυνατό μέτρο.

Μονάδες 8

Β. Να βρεθούν οι μιγαδικοί αριθμοί w οι οποίοι ικανοποιούν την εξίσωση

$$|w|^2+\overline{w}-12=z_0$$

όπου z_0 ο μιγαδικός αριθμός που αναφέρεται στο προηγούμενο ερώτημα.

Μονάδες 8

9/7/2009 ΘΕΜΑ 2^{ο} (ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ)

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει:

$$(2-i)\,z+(2+i)\,\bar{z}-8=0$$

α. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z = x+yi οι οποίοι ικανοποιούν την παραπάνω εξίσωση.

Μονάδες 10

β. Να βρείτε τον μοναδικό πραγματικό αριθμό z_1 και τον μοναδικό φανταστικό αριθμό z_2 οι οποίοι ικανοποιούν την παραπάνω εξίσωση.

Μονάδες 8

γ. Για τους αριθμούς z_1, z_2 που βρέθηκαν στο προηγούμενο ερώτημα να αποδείξετε ότι $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=40$

Μονάδες 7

8/9/2009 ΘΕΜΑ 2ο (ΟΜΟΓΕΝΩΝ)

Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός

$$z=\frac{1}{1+i}-\frac{i(i-3)}{2}.$$

α. Να αποδείξετε ότι:

$$-\bar{z}=-1+i,\quad z^2=2i,\quad z^3=-2+2i.$$

Μονάδες 9

β. Αν Α, Β, Γ είναι οι εικόνες των μιγαδικών $-\bar{z}, z^2, z^3$, αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

Μονάδες 9

γ. Να αποδείξετε ότι:

$$\left|z^3-z^2\right|^2=\left|z^2+\bar{z}\right|^2+\left|z^3+\bar{z}\right|^2.$$

Μονάδες 7

19/5/2010 ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η εξίσωση $z+\frac{2}{z}=2$ όπου $z\in C$ με $z\neq 0$

Β1. Να βρείτε τις ρίζες z_1 και z_2 της εξίσωσης.

Μονάδες 7

Β2. Να αποδείξετε ότι

$$z_1^{2010}+z_2^{2010}=0$$

Μονάδες 6

B3. Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς w ισχύει

$$|w-4+3i| = |z_1 - z_2|$$

τότε να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των w στο μιγαδικό επίπεδο.

Μονάδες 7

B4. Για τους μιγαδικούς αριθμούς w του ερωτήματος **B3**, να αποδείξετε ότι $3 \le |w| \le 7$

Μονάδες 5

7/7/2010 ΘΕΜΑ 2ο (ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ)

Έστω ότι οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2 είναι οι ρίζες εξίσωσης δευτέρου βαθμού με πραγματικούς συντελεστές για τις οποίες ισχύουν

$$z_1 + z_2 = -2 \text{ και } z_1 \cdot z_2 = 5$$

B1. Να βρείτε τους μιγαδικούς αριθμούς z_1, z_2

Μονάδες 5

B2. Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς w ισχύει η σχέση

$$|w-z_1|^2 + |w-z_2|^2 = |z_1 - z_2|^2$$

να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των w στο μιγαδικό επίπεδο είναι ο κύκλος με εξίσωση $(x+1)^2 + y^2 = 4$

Μονάδες 8

B3. Από τους μιγαδικούς αριθμούς w του ερωτήματος **B2** να βρείτε εκείνους για τους οποίους ισχύει

$$2 \cdot \mathrm{Re}(w) + \mathrm{Im}(w) = 0$$

Μονάδες 6

B4. Αν w_1, w_2 είναι δύο από τους μιγαδικούς w του ερωτήματος **B2** με την ιδιότητα $|w_1 - w_2| = 4$, να αποδείξετε ότι $|w_1 + w_2| = 2$

Μονάδες 6

14/9/2010 ΘΕΜΑ 2ο (ΟΜΟΓΕΝΩΝ)

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z για τους οποίους ισχύει

$$|z| = |z - 2i|$$

B1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z στο μιγαδικό επίπεδο είναι η ευθεία με εξίσωση $\psi = 1$

Μονάδες 7

B2. Από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z, να βρείτε εκείνους που έχουν μέτρο ίσο με $\sqrt{2}$

Μονάδες 10

B3. Έστω $z_1 = 1 + i$ και $z_2 = -1 + i$ οι μιγαδικοί αριθμοί που βρήκατε στο ερώτημα B2.

Να αποδείξετε ότι $z_1^4 + z_2^4 = -8$

Μονάδες 8

16/5/2011 ΘΕΜΑ 2ο

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z και w με $z \neq 3i$, οι οποίοι ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$|z - 3i| + |\bar{z} + 3i| = 2 \quad \text{και} \quad w = z - 3i + \frac{1}{z - 3i}$$

B1. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z

Μονάδες 7

Β2. Να αποδείξετε ότι $\bar{z}+3i=\dfrac{1}{z-3i}$

Μονάδες 4

Β3. Να αποδείξετε ότι ο w είναι πραγματικός αριθμός και ότι $-2\leq w\leq 2$

Μονάδες 8

Β4. Να αποδείξετε ότι: $|\,z-w\,|=|\,z\,|$

Μονάδες 6

6/7/2011 ΘΕΜΑ 2$^{\text{ο}}$ (ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ)

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z, w, οι οποίοι ικανοποιούν αντίστοιχα τις σχέσεις:

$$|z-i|=1+\mathrm{Im}(z) \qquad (1)$$

$$w(\bar{w}+3i)=i(3\bar{w}+i) \qquad (2)$$

Β1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι η παραβολή με εξίσωση $y=\dfrac{1}{4}x^2$

Μονάδες 7

Β2. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w είναι ο κύκλος με κέντρο το σημείο Κ(0,3) και ακτίνα $\rho=2\sqrt{2}$.

Μονάδες 7

Β3. Να βρείτε τα σημεία Α και Β του μιγαδικού επιπέδου, τα οποία είναι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z, w με $z=w$.

Μονάδες 5

Β4. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΚΑΒ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές και, στη συνέχεια, να βρείτε τον μιγαδικό αριθμό u με εικόνα στο μιγαδικό επίπεδο το σημείο Λ, έτσι ώστε το τετράπλευρο με κορυφές τα σημεία Κ,Α,Λ,Β να είναι τετράγωνο.

Μονάδες 6

6/9/2011 ΘΕΜΑ 2ο (ΟΜΟΓΕΝΩΝ)

Έστω $w = z + \frac{4}{z}$, όπου z μιγαδικός αριθμός με $z \neq 0$

Β1. Να βρείτε τους μιγαδικούς αριθμούς z_1 και z_2 για τους οποίους ισχύει $w=2$

Μονάδες 6

Β2. Αν $z_1 = 1+i\sqrt{3}$ και $z_2 = 1-i\sqrt{3}$ είναι οι μιγαδικοί αριθμοί που βρήκατε στο ερώτημα Β1, τότε να αποδείξετε ότι $z_1^3 = z_2^3 = -8$

Μονάδες 6

Β3. Αν z_1 και z_2 είναι οι μιγαδικοί αριθμοί του προηγούμενου ερωτήματος, τότε να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z_1, z_2 και $z_3 = \frac{z_1^3}{4}$ στο μιγαδικό επίπεδο είναι κορυφές ισόπλευρου τριγώνου.

Μονάδες 8

Β4. Αν $|z| = 2$, τότε να αποδείξετε ότι ο αριθμός w είναι πραγματικός.

Μονάδες 5

28/5/2012 ΘΕΜΑ 2ο

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z και w για τους οποίους ισχύουν οι επόμενες σχέσεις:

$$|z-1|^2 + |z+1|^2 = 4 \qquad (1)$$

$$|w - 5\overline{w}| = 12 \qquad (2)$$

Β1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z στο επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho = 1$

Μονάδες 6

Β2. Αν z_1, z_2 είναι δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z με $|z_1 - z_2| = \sqrt{2}$ τότε, να βρείτε το $|z_1 + z_2|$.

Μονάδες 7

Β3. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w στο επίπεδο είναι η έλλειψη με εξίσωση $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ και στη συνέχεια να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $|w|$

Μονάδες 6

Β4. Για τους μιγαδικούς αριθμούς z,w που επαληθεύουν τις σχέσεις (1) και (2) να αποδείξετε ότι:

$$1 \leq |z - w| \leq 4$$

Μονάδες 6

<u>14/6/2012 ΘΕΜΑ 2^{ο} (ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ)</u>

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z, με $z \neq -1$, για τους οποίους ο αριθμός $w = \frac{z-1}{z+1}$ είναι φανταστικός.

Να αποδείξετε ότι:

Β1. $|z| = 1$

Μονάδες 7

Β2. Ο αριθμός $\left(z - \frac{1}{z}\right)^4$ είναι πραγματικός.

Μονάδες 6

Β3. $\left(\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}\right)(z_1+z_2)\leq 4$, όπου z_1, z_2 δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z

Μονάδες 6

Β4. Οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών u, για τους οποίους ισχύει $u-ui=\frac{i}{w}-w$, $w\neq 0$, ανήκουν στην υπερβολή $x^2-y^2=1$

Μονάδες 6

4/9/2012 ΘΕΜΑ 2^{ο} (ΟΜΟΓΕΝΩΝ)

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει

$$|iz-1|=1$$

Β1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι ο κύκλος που έχει κέντρο το σημείο Κ (0, −1) και ακτίνα ρ=1

Μονάδες 9

Β2. Για τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z να αποδείξετε ότι $|z|\leq 2$

Μονάδες 8

Β3. Αν z_1, z_2 είναι δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z με $|z_1-z_2|=\sqrt{2}$ και Α, Β οι εικόνες των z_1, z_2 αντίστοιχα, τότε να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΚΑΒ, όπου Κ(0, −1), είναι ορθογώνιο.

Μονάδες 8
